

معلومات اولية عن المنطق الرياضي علي عبد الواحد محمد



كي ندخل الى عالم المنطق الرياضي، وتداعياته علينا أن نلم بما نسميه العبارة، والعبارة هي جملة خبرية، اي أنها جملة تحتمل الصدق او الكذب ، لأن ناقلاها اما ان يكون كاذبا أو صادقا، وبهذه الحالة فإن المنطق الرياضي لايعتمد النوع الآخر من الجمل وهي الجمل الإنشائية.

الفرق بين الجملة الخبرية والجملة الإنشائية

وجد الباحثون إنه، إذا أراد احد ما ، أن يبتدىء الكلام، فإنه سيكون امام خيارين، وهما ام ان يخبر عن ما شعرت به إحدى حواسه الخمسة ، كأن الشاعر سمعت صوتا كالعندليب ، او تذوقت اكلا مالحا ، او شممت عطرا اخادا ، او فمأش الحرير ملمسه ناعم. او أن يجيب عن سؤال موجه اليه، او يلبي طلبا ، فإذا تم سؤال الشخص مثلا كيف كان مزاجك البارحة؟، او يطلب من شخص أن يروي لنا ما شاهده من مسرات او أهوال في رحلته.

فالجمل من النوع الأول، (الحديث عما شعرت به الحواس الخمسة)، تحتمل الصدق أو الكذب بينما الجمل من النوع الثاني هي جمل محايدة لاصداقة ولا كاذبة

في المنطق الرياضي يتم اعتماد النوع الأول من الجمل وهي الخبرية فقط، ولا يتم اعتماد النوع الثاني من الجمل.

العبارات المنطقية..... (العبارة)

ارجو من القارئ الكريم ملاحظة ما يلي

- 1) سيتم استخدام كلمة العبارة او العبارة المنطقية بدلا من الجملة الخبرية
- 2) سيتم تسمية احتمال أن تكون العبارة صادقة او كاذبة ب (قيم الصدق) أو (قيم صدق العبارة)
- 3) إذا كانت العبارة صادقة يرمز لها (ص)، وفي بعض الأحيان يرمز لها (1)
- 4) إذا كانت العبارة كاذبة يرمز لها (ك) ، وفي بعض الأحيان يرمز لها (0)
- 5) العبارة اما بسيطة او مركبة

العبارة البسيطة:

هي العبارة التي تكون على شاكلة الأمثلة من النوع الأول، لنلاحظ الأمثلة التالية:

- النهر مياهه تجري
- الرجل يركض

- $90 = 5 + 3$
 - ضحكنا كثيرا
- هذه العبارات اما (ص) أو (ك)

تمثيل العبارة بالرمز

تميل الرياضيات دائما الى التجريد والى الاختصار ، فبدلا من ان نسطر عبارة كاملة، نرمز لها بحرف معين، وبالمناسبة ، فإن احدى التفسيرات عن سبب تسمية علم الجبر بهذا الإسم، يقولون " سمي الجبر جبرا لأنه يجبر الحرف للتعويض عن رقم أو عن عبارة او غيرها " فنستطيع القول مثلا " لتكن العبارة جاء الرجل ماشيا = م " فالحال هنا إننا نستطيع ان نعبر عن كل عبارة، بأحد الحروف الأبجدية بعد ان نشير اليها هكذا " نفرض إن العبارة.....=ع مثلا " من هنا نقول العبارة م اما ص أو ك. وتقرأ العبارة م اما صادقة أو كاذبة.

نفي العبارة

ما دمنا نتحدث عن المنطق ،فإن الإثبات والنفي هما طريق المنطق في البحث عن الحقيقة. وعليه يكون نفي الموجب سالبا ونفي السالب موجبا أي أن نفي الصادق يكون كاذبا ونفي الكاذب يكون صادقا.

وعندما يتم نفي العبارة المطلوب نفيها ، في اللغة نستخدم ادواة النفي (لا ، لم ، لن ، ليس ، ما...وهكذا) اما عند استعمال الرموز فنستخدم الرمز (~) للدلالة على النفي وفي بعض الكتب يستخدم (-) لذلك. فإذا نفي العبارة م هو ~م

وكذلك نفي ص التي هي ~ ص = ك (تقرأ نفي صادق تساوي كاذب)

ونفي ك التي هي ~ك = ص (تقرأ نفي الكاذب تساوي صادق)

العبارة (العبارة) المركبة

هي التي تتكون من عدد من العبارات المربوطة مع بعضها البعض بأدوات ربط العبارة.

ما يزال هذا التعريف مبهما ويحتاج الى توضيح ما يلي:

- (1) ادوات ربط العبارة محدودة ولكل اداة حكمها المنطقي
- (2) تسمى كل عبارة مربوطة مع عبارة اخرى او عبارات اخرى " عبارة جزئية "

3) في الحديث التالي سنكتفي بتوضيح العبارات المركبة ذات العبارتين الجزئيتين، لكي يتم فهم الموضوع بشكل أفضل.

أنواع العبارات المركبة:

أولا العبارة المركبة " الضم "

وهي العبارة المركبة التي تكون عباراتها (عباراتها) الجزئية (الجزئيتان) مربوطة (مربوطتين)، بأداة الربط الواو الضامة.

مثال : يمشي الرجل والكلاب تنبح عليه.

في هذا المثال لدينا عبارتان جزئيتان هما

الأولى : يمشي الرجل

الثانية : الكلاب تنبح عليه

وبينهما أداة ربط هي الواو

كيف نعبر عن هذه العبارة بالرموز

إن أداة الربط (الضم)، اي الواو يرمز لها بالرمز (٨)

نفرض العبارة يمشي الرجل = م

نفرض العبارة الكلاب تنبح عليه = ل

فإن يمشي الرجل والكلاب تنبح عليه = م ٨ ل

يكون لدينا دائما العبارة المركبة الضم (٨) دائما على شكل م٨٤٨ج وهكذا

قيم صدق العبارة الضم (و)

يتم بحث قيم صدق هذه العبارة المركبة ، من خلال بحث قيم صدق عباراتها الجزئية معا. فلو عدنا لمثالنا السابق نلاحظ ما يلي:

يمشي الرجل قيم صدقها اما صادقة او كاذبة

الكلاب تنبح عليه قيم صدقها نفس الشيء صادقة او كاذبة

ولكن إذا كانت :

1) العبارة الأولى صادقة والعبارة الثانية صادقة ايضا

(2) العبارة الأولى صادقة والعبارة الثانية كاذبة
(3) العبارة الأولى كاذبة والعبارة الثانية صادقة
(4) العبارة الأولى كاذبة والعبارة الثانية كاذبة
إذن لدينا الإحتمالات الأربعة فقط
فتكون العبارة الضم صادقة في حالة واحدة فقط التي هي الحالة:
يمشى الرجل و الكلاب تنبح عليه
لنلاحظ هذه الإحتمالات
يمشي الرجل و الكلاب لا تنبح عليه كاذبة
يركض الرجل والكلاب تنبح عليه كاذبة
يركض الرجل والكلاب لا تنبح عليه كاذبة
إذن تكون قيم الصدق للعبارة الضم حسب الجدول التالي:

| | | |
|---|---|---|
| م | ل | م |
| ص | ص | ص |
| ص | ك | ك |
| ك | ص | ك |
| ك | ك | ك |

نفي الضم

نفي الضم يتم من خلال نفي قيم الصدق حسب الجدول التالي:

| | | | |
|---|---|---|---------|
| م | ل | م | ~ (م ل) |
| ص | ص | ص | ك |
| ص | ك | ك | ص |
| ك | ص | ص | ص |
| ك | ك | ك | ص |

ثانيا : العبارة المركبة (العطف):

وهي العبارة المركبة التي تكون عباراتها الجزئية مربوطة بأداة الربط (أو)

مثال : يستحوذ الرأسمالي على الأرباح أو المدن مكتظة بالناس

(1) العبارة الجزئية الأولى هي : يستحوذ الرأسمالي على الأرباح

(2) العبارة الجزئية الثانية هي: المدن مكتظة بالناس

وبينهما اداة الربط (او)

نرمز الى العطف (أو) بالرمز (V)

وإذا فرضنا إن العبارة الجزئية الأولى =م

وإذا فرضنا إن العبارة الجزئية الثانية =ل

فإن العبارة :يستحوذ الرأس مالي على الأرباح او المدن مكتظة بالناس = م∨ل

قيم صدق العبارة العطف (أو):

تكون الضم صادقة ، إذا كانت إحدى العبارات الجزئية أو كلها صادقة، وتكون الضم كاذبة، إذا كانت كل عبارة من عباراتها الجزئية كاذبة. لنلاحظ الجدول التالي:

| ل∨م | م | ل |
|-----|---|---|
| ص | ص | ص |
| ص | ك | ص |
| ص | ص | ك |
| ك | ك | ك |

نفي عبارة العطف (~∨):

لاحظ الجدول التالي:

| (ل∨م)~ | ل∨م | م | ل |
|--------|-----|---|---|
| ك | ص | ص | ص |
| ك | ص | ك | ص |
| ك | ص | ص | ك |
| ص | ك | ك | ك |

في الجزء الأول كان الحديث يدور عن نوعين من العبارات المركبة

هما الضم (٨) والعطف (٧)، ونفي كل واحدة منهما ، وسنواصل الحديث عنهما ، وعن بقية العبارات المركبة في هذا الجزء الثاني.

تكافؤ العبارات :

يرمز لتكافؤ العبارات بالرمز (≡).

تعريف :

يقال لعبارتين انهما متكافئتان، إذا كانت قيم الصدق لكل منهما متشابهة تماما.

لاحظ مايلي : إذا كانت ب عبارة مركبة

وكانت ج عبارة مركبة ايضا

وكانت قيم الصدق لكل منهما حسبما يبينهما الجدول التالي

| | |
|---|---|
| ج | ب |
| ص | ص |
| ص | ص |
| ك | ك |
| ص | ص |

نقول : ب ≡ ج

وذلك لأن قيمة الصدق الأولى والثانية والثالثة والرابعة متشابهة

ولنلاحظ الجدول التالي :

| | |
|---|---|
| ج | ب |
| ص | ص |
| ص | ك |
| ك | ك |
| ك | ك |

لاحظ إنه حصل مجرد إختلاف واحد بين قيم الصدق، لكل من ب ، ج اصبحت ب لا تكافئ ج.

لاحظ الجدول التالي:

| | | | | |
|---|---|-----|-----|-------|
| ل | م | ل٨م | ل٧م | ل٧م)~ |
|---|---|-----|-----|-------|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ك | ص | ك | ص | ص | ص |
| ك | ص | ص | ك | ك | ص |
| ك | ص | ص | ك | ص | ك |
| ص | ك | ص | ك | ك | ك |

إن هذا الجدول مهم جدا فعند دراستنا له سنلاحظ

- (1) العمود الثالث والذي هو ل^٨م ، قيم صدقه هي صادق واحد وثلاثة كاذب
- (2) العمود السادس والذي هو ل^٧م)~ ، قيم صدقه هي ثلاثة كاذب وواحد صادق
- (3) العمود الرابع والذي هو ل^٨م)~ ، قيم صدقه واحد كاذب وثلاثة صادق
- (4) العمود الخامس والذي هو ل^٧م ، قيم صدقه ثلاثة صادق وواحد كاذب
- (5) مع ذلك فالعمود الثالث لا يكافئ العمود السادس ، لأن تسلسل قيم الصدق مختلف لديهما بالرغم من تساوي عدد الاحتمالات
- (6) كذلك الحال بالنسبة للعمودين الثالث والرابع (وضح ذلك لطفاً ؟)

البحث بين النتائج عن التكافؤ

لاحظ الجدول التالي :

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|------------------|--------------------|------------------|--------------------|
| ل | م | ل~ | م~ | ل ^٨ م | ل~ ^٨ م~ | ل ^٧ م | ل~ ^٧ م~ |
| ص | ص | ك | ك | ص | ك | ص | ك |
| ص | ك | ك | ص | ك | ك | ص | ص |
| ك | ص | ص | ك | ك | ك | ك | ص |
| ك | ك | ص | ك | ك | ص | ص | ص |

من الجدولين الأخيرين أو قل الجدول الثالث والجدول الرابع نجد ان

$$(1) \dots\dots\dots \text{ل}^{\sim 7}\text{م}^{\sim} \equiv \text{ل}^{\sim 8}\text{م}^{\sim} \dots\dots\dots (1)$$

$$(2) \dots\dots\dots \text{ل}^{\sim 8}\text{م}^{\sim} \equiv \text{ل}^{\sim 7}\text{م}^{\sim} \dots\dots\dots (2)$$

عبارة الإختيار:

هي حالة خاصة من العطف ، ولكنها تكون على شكل اما.....أو.....,يرمز لها بـ

العبارة الإختيار تكون صادقة في حالة صدق احدى العبارتين الجزئيتين

وتكون كاذبة في حالة صدق العبارتين الجزئيتين وكذلك في حالة كذبهما

المثال التالي يوضح قيم الصدق للعبارة الإختيار

مثال: بين قيم صدق العبارة التالية:

الشاعر اما أن يلقي قصيدته أو يستمع للآخرين.

إذا القى الشاعر القصيدة فقط تكون العبارة صادقة، لأنه ليس هناك شاعر آخر ليستمع له
وإذا لم يلق قصيدة فيكون غيره قد القى قصيدة وهو هنا يستمع تكون العبارة صادقة
اما في حالة لايلقي ولايستمع تكون العبارة كاذبة
ولايمكنه ان يلقي ةأن يستمع في آن واحد العبارة كاذبة
إذن يكون الجدول:

| | | |
|---|---|---|
| ل | ع | ل |
| ص | ص | ك |
| ص | ك | ص |
| ك | ص | ص |
| ك | ك | ك |

عبارة الإستثناء:

هي حالة خاصة من الضم وتكون على شكل:

لا..... و لا..... ويرمز لها بالرمز (↕) ولها قيم صدق نفس قيم صدق الضم

عبارة الشرط أو تسمى العبارة الشرطية

وتكون على شكل:

إذا كان..... فإن..... أو أي جملة شرطية في اللغة، فليس شرطاً أن تبندئ ب (إذا) يمكن
تبندئ ب(إن) كقول الشاعر : وإن انت اكرمت الكريم ملكته، ولكن شكلها النموذجي يكون بشكل
إذا كان..... فإن.....

ويرمز لها بالرمز (←) وتقرأ (يستلزم ، يؤدي الى ، يشترط)

فإذا كانت العبارة الجزئية الأولى (عبارة الشرط) هي ل

وكانت العبارة الجزئية الثانية (جواب الشرط) هي م

فتكون العبارة الشرطية على شكل : ل←م

قيم صدق عبارة الشرط: الحالة الوحيدة التي تكون فيها عبارة الشرط كاذبة أ هي الحالة التي تكون فيها
المقدمات (جملة الشرط) صادقة والنتائج (جواب الشرط) كاذبة، ام الحالات الباقية فكلها تكون فيها عبارة
الشرط صاقة كما فيالجدول التالي:

| | | |
|-------|---|---|
| ل ← م | م | ل |
| ص | ص | ص |
| ك | ك | ص |
| ص | ص | ك |
| ص | ك | ك |

مثال : قارن بين :

ل ← م ، ~ل م

الحل : في الجدول التالي:

| | | | | |
|------|-------|----|---|---|
| ~ل م | ل ← م | ~ل | م | ل |
| ص | ص | ك | ص | ص |
| ك | ك | ك | ك | ص |
| ص | ص | ص | ص | ك |
| ص | ص | ص | ك | ك |

من الجدول نلاحظ العمود الرابع والعمود الخامس ونشاهد انهما متطابقان

إذن

$$ل ← م \equiv \sim ل م$$

نفي عبارة الشرط:

عند دراسة قيم الصدق للعبارة الشرطية وجدنا إنها ثلاث احتمالات صادقة وإحتمال واحد

كاذب، ووجدنا ، إن $ل ← م \equiv \sim ل م$

وعليه فإن $\sim (ل ← م) \equiv \sim (\sim ل م)$

من الجدول التالي:

| | | | | | | |
|-------------------|------------|----|----------------|-------|---|---|
| $\sim (\sim ل م)$ | $\sim ل م$ | ~ل | $\sim (ل ← م)$ | ل ← م | م | ل |
| ك | ص | ك | ك | ص | ص | ص |
| ص | ك | ك | ص | ك | ك | ص |
| ك | ص | ص | ك | ص | ص | ك |
| ك | ص | ك | ك | ص | ك | ك |

من الجدول نتحقق $\sim (ل ← م) \equiv \sim (\sim ل م)$

الشرط اللازم والكافي، ويقال له (إذا فقط إذا)

إنها عبارة الشرط ولكنها تشترط ما يلي:

مقدمتها تشترط حصول نتائجها و نتائجها تشترط وجود مقدمتها، في نفس الوقت

مثال على ذلك:

إذا ضمن الرأسماليون الإستحواذ على القيمة الزائدة، فإنهم ينشطون في الإستثمار

نلاحظ في هذا المثال ما يلي:

- 1) العبارة شرط على شكل إذا كان فإن.....
- 2) ان العبارة الجزئية إذا كان..... تشترط العبارة الجزئية فإن.....
- 3) وإن العبارة الجزئية فإن تشترط العبارة الجزئية إذا كان.....

لنعد الى مثالنا الذي نلاحظ فيه ما يلي:

لكي يضمن الرأسماليون الإستحواذ على القيمة الزائدة، فإنهم يبذلون أقصى جهودهم في إستثمار العمال والأموال.

وإن إستثمارهم هذا يؤدي الى إستحواذهم على القيمة الزائدة وسرقته

مثل آخر من الهندسة المستوية:

إذا قطع مستقيمان بقاطع، وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين ، كان المستقيمان متوازيين

وإذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع، كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين

العبارة الشرط اللازم والكافي يقال لها (إذا فقط إذا) وتختصر (إنذ)

يرمز لها بالرمز (\Leftrightarrow)

فيقال $L \Leftrightarrow M$ الشرط اللازم والكافي

قيم الصدق للعبارة الشرط اللازم والكافي

العبارة صادقة في حالتين فقط:

1) إذا كانت المقدمات صادقة والنتائج صادقة

2) إذا كانت المقدمات كاذبة والنتائج كاذبة

الجدول التالي يوضح ذلك

| | | |
|---|---|-----------------------|
| ل | م | $L \Leftrightarrow M$ |
| ص | ص | ص |

| | | |
|---|---|---|
| ك | ك | ص |
| ك | ص | ك |
| ص | ك | ك |

من الجدول نلاحظ إن هناك 2 إجمال ص ، و 2 إجمال ك وهو نفس عدد إجمالات ص ، ونفس عدد إجمالات ك ، في العبارة الإختيار اما..... أو.....(ص)، ولكن بترتيب يختلف ، حيث كانت قيم صدق الإختيار:

| | |
|-----|--------|
| ل م | ~(ل م) |
| ك | ص |
| ص | ك |
| ص | ك |
| ك | ص |

من الجدولين:
 $ل \leftrightarrow م \equiv \sim (ل م)$